



Simularea examenului de bacalaureat național 2018

Proba E. c) - 20.12.2017

M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Subiectul I

(30 puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $\lg(13-5\sqrt{6}) + \lg(13+5\sqrt{6}) - \lg 19$ este natural.
- 5p 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + m + 2$, $m \in \mathbb{R}$. Aflați parametrul real m știind că imaginea funcției este $\text{Im } f = [0, \infty)$.
- 5p 3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $2\lg^2 x - \lg x - 1 = 0$.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{\log_5 n/n \in \mathbb{N}^*, n \leq 100\}$, acesta să fie număr rațional.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.
Determinați numerele reale a, b astfel încât $\overrightarrow{CM} = a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$.
- 5p 6. Arătați că $\sin \frac{14\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{6} = 0$.

Subiectul II

(30 puncte)

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ și sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + m^2z = 0 \end{cases}$$
 și A matricea sistemului.
- 5p a) Calculați $\det(A)$.
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are numai soluția banală.
- 5p c) Pentru $m = 2$, determinați soluția sistemului (x_0, y_0, z_0) pentru care $x_0 > 0$ și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6$.
2. Fie mulțimea $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1-3a & 6a \\ -2a & 1+4a \end{pmatrix}, a \in (-1, \infty) \right\}$.
- 5p a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.
- 5p b) Arătați că (G, \cdot) este grup abelian.
- 5p c) Calculați $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2017)$.

Subiectul III

(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.
- 5p a) Calculați $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$.
- 5p b) Determinați asimptotele graficului funcției.
- 5p c) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se definește $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2x+3} dx$.
- 5p a) Calculați I_1 .



5p b) Demonstrați că $2I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 3.$

5p c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{5}.$

BAREM ORIENTATIV DE EVALUARE
Proba E. c) - 20.12.2017
M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

Subiectul I

(30 puncte)

1.	$\lg(13 - 5\sqrt{6}) + \lg(13 + 5\sqrt{6}) = \lg(13^2 - 5^2 \cdot 6)$	2p
	$\lg(13^2 - 5^2 \cdot 6) = \lg 19;$	2p
	$\lg(13^2 - 5^2 \cdot 6) - \lg 19 = \lg \frac{19}{19} = 0 \in \mathbb{N};$	1p
2.	$\text{Im } f = f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ pentru funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a > 0$.	1p
	$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -m^2 + m + 2$, de unde $-m^2 + m + 2 = 0$	2p
	Se obține $m \in \{-1, 2\}$.	2p
3.	Condiția $x > 0$.	1p
	$\lg x = t \quad 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}$	2p
	$\lg x = t_1 \Rightarrow x_1 = 10, \lg x = t_2 \Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$	2p
4.	$\log_5 n = k \in \mathbb{Q} \Rightarrow n = 5^k$	1p
	$n \leq 100 \Rightarrow k \in \{0, 1, 2\}$	2p
	$P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{100}$	2p
5.	$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} =$	1p
	$= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{4}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$	3p
	$a = \frac{4}{5}, b = \frac{1}{5}.$	1p
	Sau din $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{CA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{CB}$, pentru $k = \frac{1}{4}$ se obține $a = \frac{4}{5}, b = \frac{1}{5}.$	(5p)
6.	$\sin \frac{14\pi}{3} = \sin(4\pi + \frac{2\pi}{3}) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2p
	$\cos \frac{17\pi}{6} = \cos(2\pi + \frac{5\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	2p



	Finalizare	1p
Subiectul II		(30 puncte)
1. a)	$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix}$	2p
	$\det(A) = 3m^2 - 12.$	3p
b)	Sistemul de ecuații liniare omogene este compatibil determinat, având doar soluția banală dacă $\det(A) \neq 0$,	3p
	adică $3m^2 - 12 \neq 0$, de unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.	2p
c)	De la punctul anterior avem pentru $m = 2$ se obține $\det(A) = 0$, deci sistemul este compatibil nedeterminat. Se aleg x, y necunoscute principale și $z = \alpha \in \mathbb{R}$. Ecuațiile principale formează sistemul $\begin{cases} 2x + y = -3\alpha \\ x + 2y = -3\alpha \end{cases}$, de unde $x = -\alpha, y = -\alpha$. Soluțiile sistemului sunt de forma $(-\alpha, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$	3p
	Pentru orice soluție nebanală $(-\alpha, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}^*$ se obține $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3\alpha^2$, de unde $\alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{2}$. Soluția cu condițiile din enunț este $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.	2p
2. a)	$(\forall) A(a), A(b) \in G \Rightarrow A(a) \cdot A(b) \in G$	2p
	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 - 3(ab + a + b) & 6(ab + a + b) \\ -2(ab + a + b) & 1 + 4(ab + a + b) \end{pmatrix} = A(ab + a + b) \in G.$	3p
b)	Asociativitate: $(\forall) A(a), A(b), A(c) \in G \Rightarrow (A(a) \cdot A(b)) \cdot A(c) = A(a) \cdot (A(b) \cdot A(c))$ Comutativitate: $(\forall) A(a), A(b) \in G \Rightarrow A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a)$ $A(a) \cdot A(b) = A(ab + a + b) = A(ba + b + a) = A(b) \cdot A(a).$	2p
	Element neutru: $(\exists) E = A(e) \in G$ a.î. $A(a) \cdot A(e) = A(e) \cdot A(a) = A(a), (\forall) A(a) \in G.$ $A(a) \cdot A(e) = A(ae + a + e).$ Din $A(ae + a + e) = A(a) \Rightarrow e = 0.$ Se obține $A(e) = A(0) = I_2 \in G.$	1p
	Elemente simetrizabile: $(\forall) A(a) \in G, (\exists) A(a') \in G$ a.î. $A(a) \cdot A(a') = A(a') \cdot A(a) = A(0),$ Din $A(aa' + a + a') = A(0) \Rightarrow a' = \frac{-a}{a+1}, a > -1.$ Se obține $A(a') = A\left(\frac{-a}{a+1}\right) \in G, (\forall) a \in (-1, \infty).$	2p
c)	Se scrie $A(a) \cdot A(b) = A(ab + a + b) = A((a+1)(b+1) - 1)$ Atunci avem $A(1) \cdot A(2) = A(2 \cdot 3 - 1)$ și $A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) = (A(1) \cdot A(2)) \cdot A(3) = A(2 \cdot 3 - 1) \cdot A(3) = A(2 \cdot 3 \cdot 4 - 1).$	2p
	Inducție matematică pentru $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(n) = A((n+1)! - 1), n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$	2p
	Se obține $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2017) = A(2018! - 1).$	1p



Subiectul III

(30 puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{2}{(x+4)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$	2p
	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = f'(-1) = \frac{2}{9}$	3p
b)	Avem $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \frac{x+2}{x+4} = +\infty$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} \frac{x+2}{x+4} = -\infty$ de unde $x = -4$ este asimptotă verticală	3p
	Din $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x+4} = 1$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+4} = 1$ rezultă că $y = 1$ reprezintă asimptotă orizontală spre $-\infty$, respectiv spre $+\infty$.	2p
c)	Monotonia: $f'(x) = \frac{2}{(x+4)^2} > 0, (\forall) x \in (-4, \infty)$ de unde f este strict crescătoare pentru $x \in (-4, \infty)$. Folosind inducția matematică și f este strict crescătoare se arată $x_{n+1} - x_n < 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, rezultă șir strict descrescător.	2p
	Mărginirea: $0 < x_n \leq 1, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.	1p
	Șirul fiind mărginit și descrescător este convergent. Dacă x este limita șirului, atunci trecând la limită în relația de recurență se obține $x = \frac{x+2}{x+4}$ de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \frac{\sqrt{17}-3}{2}$.	2p
2. a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 dx - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{2x+3} dx =$	3p
	$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \ln \frac{5}{3}$.	2p
b)	Avem $2I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{x^n(2x+3)}{2x+3} dx =$	3p
	$= \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.	2p
c)	Din $0 \leq x \leq 1$ rezultă că $0 \leq \frac{x^{n+1}}{2x+3} \leq \frac{x^n}{2x+3} \Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$	2p
	Atunci $5I_{n+1} \leq 2I_{n+1} + 3I_n \leq 5I_n \Leftrightarrow 5I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 5I_n \Leftrightarrow \frac{n}{5(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{1}{5}$,	2p
	de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{5}$.	1p